Předpokládané znalosti ze středoškolské matematiky

1. **Matematická logika**

   Výroky, složené výroky: konjunkce ($\wedge$, a zároveň), disjukce ($\vee$, nebo), negace výroků ($\neg$ před nebo čárka nad označením výroku), implikace ($\Rightarrow$), ekvivalence ($\Leftrightarrow$), kvantifikátory; co je definice, matematická věty, důkaz.

   Příklad výroků:

výrok u :	budu se účastnit výuky
výrok d :	doplním si nedostatky
výrok z :	udělám zkoušku z matematiky

   Zapište symbolicky následující složené výroky (předpokládejme, že jsou pravdivé) a rozmyslete si rozdíly mezi první a druhou dvojicí složených výroků:

1 a)	Když si doplním nedostatky, udělám zkoušku z matematiky.
1 b)	Zkoušku udělám právě tehdy, když si doplním nedostatky.
2 a)	Když se budu účastnit výuky a doplním si nedostatky, udělám zkoušku z matematiky.
2 b)	Když se budu účastnit výuky nebo si doplním nedostatky, udělám zkoušku z matematiky.

   Pokuste se rozhodnout o pravdivosti následujících výroků a formulujte jejich negace.

   (a) Všichni přijatí uchazeči se zapíší ke studiu na PřF.

   (b) Úvodního soustředění na Albeři se neúčastní žádný student přijatý ke studiu oboru Biochemie.

   (c) Dvacet přijatých uchazečů oboru Medicinální chemie se zapsalo ke studiu.

   (d) Alespoň dva přijatí uchazeči oboru Biochemie se neúčastní soustředění.

   (e) Všichni účastníci soustředění byli přijati ke studiu na jediný obor.

2. **Číselné obory**

N :	obor přirozených čísel
Z :	obor celých čísel
Q :	obor racionálních čísel
R :	obor reálných čísel
C :	obor komplexních čísel (viz dále podrobněji)
R^+ :	obor kladných reálných čísel
R_0^+ :	obor nezáporných reálných čísel

   Geometrická interpretace absolutní hodnoty čísla je vzdálenost jeho obrazu od počátku a také absolutní hodnota $|a-b|$ je vzdálenost bodů a a b na reálné ose.

   (a) Řešte v R: $|x-2|=5$ (Vzdálenost x od 2 je rovna 5; tedy $x \in \{-3,7\}$).

   (b) Řešte v R: $|x+2| \geq 3 \Leftrightarrow |x-(-2)| \geq 3$; vzdálenost x od -2 je větší nebo rovna 3; tedy $x \in (-\infty,-5\rangle \cup \langle 1,\infty)$.

   (c) Řešte v R: $|3-x|<1 \Leftrightarrow |x-3|<1$ (protože platí $|a|=|-a|$); vzdálenost x od 3 je menší než 1, tedy $x \in (2,4)$.

(d) Řešte v R: $|2x-8| \leq 2 \Leftrightarrow 2|x-4| \leq 2 \Leftrightarrow |x-4| \leq 1$; vzdálenost x od 4 je menší nebo rovna než 1, tedy $x \in \langle 3, 5 \rangle$.

(e) Řešte v C: $|z-2| = 5$; vzdálenost z od 2 je rovna 5; rovnici splňují všechny body kružnice se středem $[2, 0]$ a poloměrem 5 jednotek.

(f) Řešte v C: $|z-2| < 5$; vzdálenost z od 2 je menší než 5; rovnici splňují všechny body kruhu (bez hraniční kružnice) se středem $[2, 0]$ a poloměrem 5 jednotek.

3. **Množiny**

Rovnost, průnik, sjednocení, rozdíl dvou množin; kartézský součin množin.

(a) Určete $A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A \times B$, jestliže je dáno: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{n \in \mathrm{N};\, n \geq 2\}$.

(b) Určete množinu $C \subset \mathrm{N}$ tak, aby platilo: $A \subset C, C \subset (A \cap B), C \subset B, A \subset C$.

4. **Algebraické výrazy a jejich úpravy**

Nutno znát (oběma směry):

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^2 + b^2$ nejde rozložin na součin!

Doporučeno:

- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots ab^{n-2} + b^{n-1})$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ lze pouze pro n liché

Upravte následující výrazy a stanovte podmínky:

(a) $\frac{\frac{a+b}{a-b} - 1}{\frac{a+b}{a-b} + 1}$

(b) $\left(v + \frac{u-v}{1+uv}\right) : \left[1 - \frac{v(u-v)}{1+uv}\right]$

(c) $\frac{7x-1}{2x^2+6x} - \frac{3x-13}{x^2-9}$

5. **Kvadratické a jiné rovnice v R**

Ekvivalentní úpravy rovnic (přičtení/odečtení libovolného výrazu k oběma stranám rovnice, násobení/dělení nenulovým číslem) nemění množinu řešení rovnice.

Obecný princip řešení mnoha rovnic:

$$r \cdot s = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee s = 0$$

Řešení kvadratických rovnice v R: Rozklad na součin tzv. kořenových činitelů; x_1 a x_2 je možno určit různými způsoby (vytknutím, pomocí vzorce přes diskriminant, doplněním na čtverec, použitím Vietových vzorců, atd.):

$$ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Nutno znát zpaměti vzorec pro reálné kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \ \texttt{kde} \ D = b^2 - 4ac \geq 0$$

Příklad na rozklad doplněním na čtverec s využitím vzorce $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 2^2 = (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1)$

(a) Rovnice vyšších řádů (postupné vytýkání a rozklad)

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 2x &= 0 \\ x(2x^2 + 3x - 2) &= 0 \\ x \cdot 2(x - \tfrac{1}{2})(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

(b) Rovnice vyšších řádů (substituce)

$$\begin{array}{rcll} x^4 - 3x^2 - 4 &=& 0; & \text{subst. } y = x^2 \\ y^2 - 3y - 4 &=& 0 & \\ (y - 4)(y + 1) &=& 0 & y_1 = 4, \text{ tj. } x_1 = 2 \text{ a } x_2 = -2 \\ & & & y_2 = -1, \text{ nevyhovuje} \end{array}$$

(c) Rovnice s neznámou v odmocnině (umocnění není ekvivatelní úpravou - zkouška je nutnou součástí úlohy):

$$\begin{array}{rcl} x + 1 &=& \sqrt{x + 3} \\ x^2 + 2x + 1 &=& x + 3 \\ x^2 + x - 2 &=& 0 \\ (x + 2)(x - 1) &=& 0 \\ x = -2 \text{ nebo } x = 1\ , & & \text{ale } x = -2 \text{ nevyhovuje původní rovnici,} \\ & & \text{řešení je pouze jedno, a to } x = 1. \end{array}$$

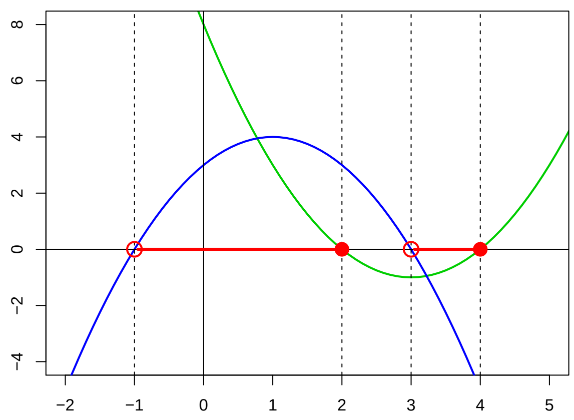
6. **Nerovnice**

Nutno znát:

- při násobení nerovnice záporným číslem se mění znak nerovnosti v opačný
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- pro řešení rovnice $x^2 = 4$ můžeme psát řešení ve tvaru $x_{1,2} = \pm 2$; nelze však použít analogii při řešení nerovnice $x^2 > 4$, kde NELZE psát řešení ve tvaru $x > \pm 2$, ale odmocnit nerovnici, tj. $|x| > 2$ a řešení je $x \in (-\infty, -2) \cup (2; \infty)$.

(a) Příklad řešení nerovnice v R:

$$\begin{aligned}
\frac{-x^2-2x+14}{-x^2+2x+3} &\geq 2 \\
\frac{-x^2-2x+14}{-x^2+2x+3} - 2 &\geq 0 \\
\frac{-x^2-2x+14-2(-x^2+2x+3)}{-x^2+2x+3} &\geq 0 \\
\frac{x^2-6x+8}{-x^2+2x+3} &\geq 0, \quad \text{čitatel i jmenovatel musejí mít stejné znaménko,} \\
\frac{(x-4)(x-2)}{-(x+1)(x-3)} &\geq 0, \quad \text{nejjednodušší je řešit pomocí grafů obou funkcí} \\
x \in (-1, 2\rangle \cup (3, 4\rangle & \qquad\quad \text{(jmenovatel musí být různý od nuly)}
\end{aligned}$$



(b) K procvičení

i. $\frac{4x+7}{x+1} > 2$

ii. $(x+1)^2 > 4$

iii. $4x^2 + 5x - 6 < 0$

iv. $\frac{2x^2-x-3}{x^2-2x} \geq 0$

7. **Mocniny a odmocniny**

Používané vzorce pro přípustné hodnoty a, m, n:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $a^r : a^s = a^{r-s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Nutno znát a umět používat označení a úpravy:

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$
- $\sqrt{72} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$ ...... částečné odmocnění
- $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$ ...... usměrnění zlomku
- $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1$ ...... usměrnění zlomku

Příklad: Upravte číselný výraz $\frac{3-\sqrt{15}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

8. **Základní informace o funkcích**

Nutno znát pojmy a u základní funkcí umět určit:

- definiční obor a obor hodnot funkce
- vlastnosti funkce (sudá, lichá, periodická, omezená, monotónní, prostá)
- inverzní funkce (používá se označení $f^{-1}(x)$)
- složená funkce

Základní funkce:

- lineární $f(x) = ax + b$
- mocninné $f(x) = x^a$, zejména pro $a \in \{-1, 0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}\}$
- exponenciální, logaritmické
- goniometrické
- absolutní hodnota jako funkce

U výše uvedených funkcí je třeba znát jejich grafy a grafy funkcí, které vzniknou odvozením (posun po ose x, po ose y, násobení číslem, změna znaménka, atd).

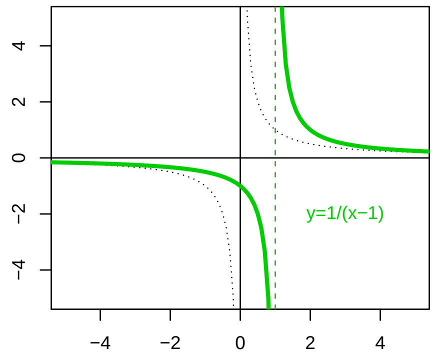
Příklad postupného odvození grafu funkce

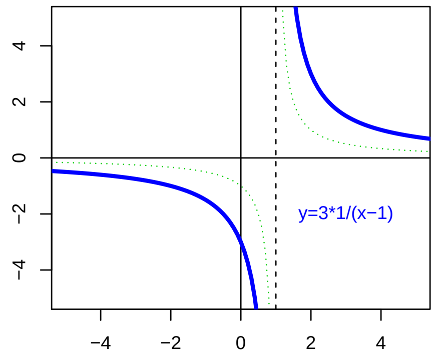
$$f(x) = \frac{2x-5}{x-1} = \frac{2(x-1)-3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} - \frac{3}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-1}$$

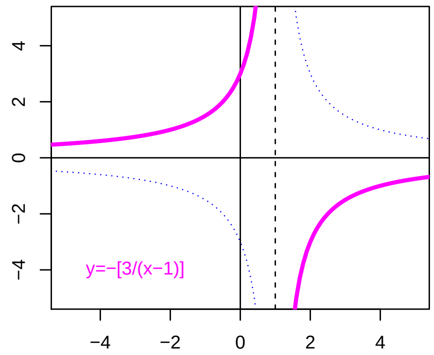
je vidět na obrázku.

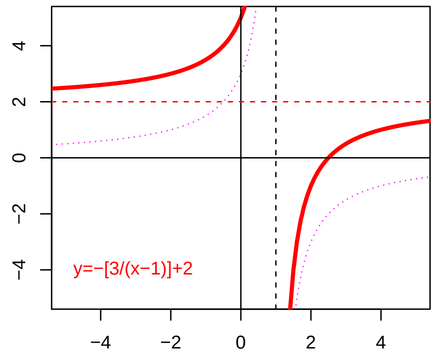
(a) Načtněte grafy funkcí a určete jejich definiční obory a obory hodnot:

  i. $f(x) = x^2 - 4x - 5$
  ii. $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$
  iii. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$
  iv. příklady dalších druhů funkcí následují









9. **Exponenciální a logaritmické funkce**

Nutno znát:

$$a^y = x \Leftrightarrow \log_a x = y, \quad (a \in R^+ - \{1\})$$

Další používané vzorce pro **přípustné** hodnoty ($x > 0$, $y > 0$, a, $b \in R^+ - \{1\}$):

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$

Používá se zkrácený zápis $(\log_a x)^2 = \log_a^2 x \neq \log_a x^2$

POZOR! $\log_a \frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$

Najděte k následujícím funkcím funkce inverzní, určete jejich definiční obor a obor hodnot, načtněte grafy funkce f i f^{-1}:

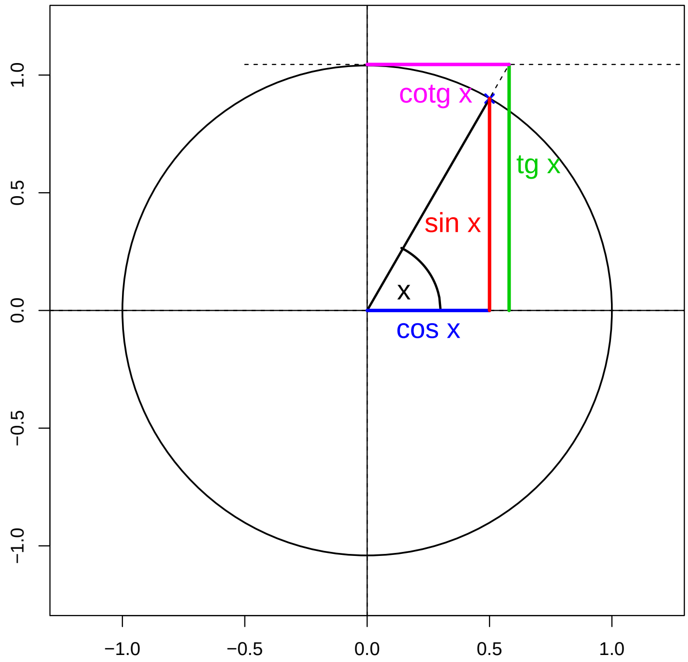
(a) $f(x) = 2^{x+3} - 1$

(b) $f(x) = -2^{x-1}$

(c) $f(x) = -\log_2(x + 2)$

10. **Goniometrické funkce**

Nutno znát a umět používat následující vzorce, umět využívat grafické znázornění hodnot goniometrických funkcí na jednotkové kružnici:



- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$

Další používané vzorce:

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Používá se zkrácený zápis $(\sin x)^2 = \sin^2 x \neq \sin x^2$

POZOR! $\sin 2x \neq 2 \sin x$

Načtněte grafy následujících funkcí:

(a) $f(x) = 2 \sin x - 1$

(b) $f(x) = \sin 2x$

(c) $f(x) = |\sin x|$

(d) $f(x) = \sin |x|$

Určete definiční obory následujících funkcí:

(a) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$

(b) $f(x) = \frac{x-1}{2\cos^2 x + \sin x - 1}$

(c) $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$

(d) $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}$

11. **Analytická geometrie v rovině**

Velikost vektoru $\vec{u} = (u_1; u_2)$: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Skalární součin vektorů $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$; kde $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ výsledkem je číslo, ne vektor $(u_1 \cdot v_1; u_2 \cdot v_2)$!!!!

Rovnice přímky p:

- parametrické vyjádření: $$\begin{array}{rcccl} x & = & a_1 & + & u_1 \cdot t \\ y & = & a_2 & + & u_2 \cdot t \end{array}$$

  kde $\vec{u} = (u_1; u_2)$ je směrový vektor přímky p, $A[a_1; a_2]$ je libovolný bod přímky p, parametr $t \in R$
- obecná rovnice: $ax + by + c = 0$, kde $\vec{n} = (a; b)$ je normálový vektor přímky p
- rovnice ve směrnicovém tvaru: $y = kx + q$, kde k je směrnice (tg úhlu, který přímka svírá s kladnou částí osy x)

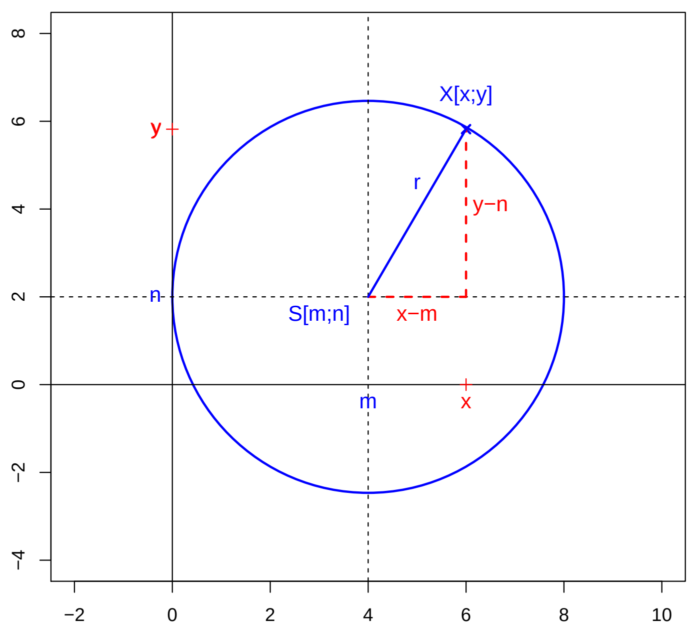
Odchylka vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|};$$

odtud plyne, že nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou **kolmé**, právě tehdy když je jejich skalární součin roven nule.

Rovnice kružnice se středem $S[m; n]$ a poloměru r (popisuje vztah mezi souřadnicemi bodů na kružnici):

- ve středovém tvaru: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$
- obecná rovnice kružnice: $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$



Není třeba znát vzorec pro vzdálenost bodu $M[x_0; y_0]$ od přímky $p: \ ax + by + c = 0$, lze odvodit, resp. vypočítat jinak.

$$v(M,p) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{|(a;b)|}$$

Jsou dány body $A[1;2]$, $B[-3;4]$, $C[-2;-1]$,$D[2;-3]$, $E[1;0]$, $F[-1;2]$, $G[0;-2]$, $H[-4;0]$.

(a) Určete rovnice přímek AB, CD, EF, GH a jejich vzájemnou polohu.

(b) Zjistěte, zda trojice bodů ABC (ABD, ABF, AFE, CDE, CDH) mohou být vrcholy trojúhelníku. V kladném případě zjistěte, zda je trojúhelník pravoúhlý, ostroúhlý či tupoúhlý (případně rovnostranný či rovnoramenný).

(c) Zapište rovnici přímky p, která je rovnoběžná s přímkou IJ a prochází bodem $K[3;2]$, kde $I[1;3]$, $J[-2;-3]$

(d) Zapište rovnici přímky q, která je kolmá na přímku AB a prochází bodem $L[4;9]$.

(e) Určete průsečík přímky q s přímkou IJ.

(f) Vypočtěte vzdálenost bodu $L[4;9]$ od přímky IJ.

(g) Vypočtěte vzdálenost bodu $L[4;9]$ od přímky q.

(h) Zapište rovnici kružnice, procházející body $P[4;-1]$, $Q[4;3]$, $R[1;0]$.

(i) Zapište rovnici kružnice, procházející body $T[3;1]$, $U[-6;-2]$, $V[2;-6]$.

12. Analytická geometrie v prostoru

Velikost vektoru $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Skalární součin vektorů $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$, kde $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$

Vektorový součin vektorů (je zaveden pouze v prostoru) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$, kde $\vec{w}$ v kartézské soustavě platí $\vec{w} = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$. Vektorový součin dvou nenulových nezávislých vektorů je kolmý k oběma vektorům a jeho velikost je rovná obsahu rovnoběžníku vymezeného těmito vektory.

Rovnice přímky p:

- parametrické vyjádření:
$$\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 \cdot t \\ y &= a_2 + u_2 \cdot t \\ z &= a_3 + u_3 \cdot t \end{aligned}$$

  kde $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ je směrový vektor přímky p , $A[a_1; a_2; a_3]$ je bod přímky p, parametr $t \in R$

- **v prostoru nelze přímku popsat obecnou rovnicí!**

Rovnice roviny α

- parametrické vyjádření:
$$\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 \cdot r + v_1 \cdot s \\ y &= a_2 + u_2 \cdot r + v_2 \cdot s \\ z &= a_3 + u_3 \cdot r + v_3 \cdot s \end{aligned}$$

  kde $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ jsou nenulové nekolineární vektory ležící v rovině α, $A[a_1; a_2; a_3]$ je bod roviny α, parametry $r, s \in R$.

- obecná rovnice roviny: $ax + by + cz + d = 0$, kde $\vec{n} = (a; b; c)$ je normálový vektor roviny α.

Odchylka nenulových vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Není třeba znát vzorec pro vzdálenost bodu $M[x_0; y_0; z_0]$ od roviny $\alpha :\ ax+by+cz+d = 0$, lze odvodit, resp. spočítat jinak

$$v(M, p) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + cz_0 + d|}{|(a; b; c)|}$$

(a) Jsou dány body $A[1; 2; 3]$, $B[0; -1; 2]$, $C[2; 1; -1]$,$D[3; 4; 0]$, $E[1; 3; 2]$, $F[-1; 1; 0]$, $G[-3; -6; 4]$, $H[3; 0; -5]$.

   i. Určete rovnice přímek AB, CD, EF, GH a jejich vzájemnou polohu.

   ii. Zjistěte, zda trojice bodů ABC (ABE, ABF, ACH, ACG, ABH) určují rovinu. V kladném případě zapište její rovnici (jednak parametrickou, jednak obecnou rovnici) a určete, zda je trojúhelník ABC pravoúhlý, ostroúhlý či tupoúhlý (případně rovnostranný či rovnoramenný) a určete jeho obsah (např. s využitím vektorového součinu).

   iii. Určete vzdálenost bodu $K[12; -7; 2]$ od roviny procházející body ABC.

(b) Určete vzdálenost bodu $P[0; -5; 4]$ od přímky p:

$$\begin{array}{rrcrcr} p: & x & = & 2 & + & t \\ & y & = & 1 & + & 3t \\ & z & = & 2 & - & t \end{array}$$

(c) Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny α:

$$\begin{array}{rrcrcr} p: & x & = & 2 & + & t \\ & y & = & 1 & + & 3t \\ & z & = & 2 & - & t \end{array} \qquad \begin{array}{rrcrcrcr} \alpha: & x & = & 11 & + & r & - & 2s \\ & y & = & 8 & - & 2r & - & s \\ & z & = & -1 & + & 2r & + & s \end{array}$$

(d) Určete vzájemnou polohu rovin α, δ a ϑ. Roviny jsou dány následujícími rovnicemi: $\alpha : 2x - 2y + z + 1 = 0$, $\delta : x - 3y + 2z + 4 = 0$, $\vartheta : -x + 2y - z - 2 = 0$

(e) Určete vzájemnou polohu rovin α, δ a ε. Roviny jsou dány následujícími rovnicemi: $\alpha : 2x - 2y + z + 1 = 0$, $\delta : x - 3y + 2z + 4 = 0$, $\varepsilon : x - 7y + 5z + 1 = 0$

13. Komplexní čísla

Motivace zavedení komplexních čísel: umožnění výpočtu druhé odmocniny i ze záporného čísla, aby šlo např. vyřešit každou kvadratickou rovnici (i se záporným diskriminantem).

Označení komplexního čísla z: $z = [x, y]; x, y \in \mathrm{R}$; x je reálná složka, y je imaginární složka komplexního čísla. Specielně $[0, 1] = \mathrm{i}$, a platí $\mathrm{i}^2 = -1$.

Výraz $x + y\,\mathrm{i}$ se nazývá algebraický tvar komplexního čísla z. Číslo $\bar{z} = x - y\,\mathrm{i}$ je tzv. číslo komplexně sdružené.

Absolutní hodnota komplexního čísla z je vzdálenost bodu $[x, y]$ v Gaussově rovině od počátku a spočteme ji (dle Pythagorovy věty): $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

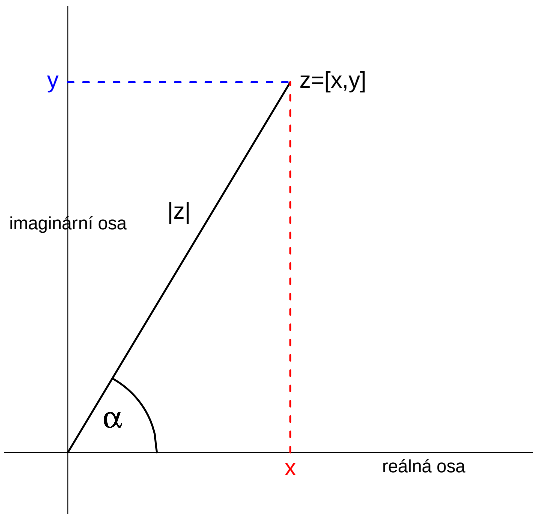
Goniometrický tvar komplexní čísla $z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ umožňuje snadný výpočet mocnin a komplexních odmocnin, neboť platí:

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin \mathrm{n}\alpha)$$

Obrázek ukazuje, jak je možno převést číslo $z = x + y\,\mathrm{i}$ na goniometrický tvar:

$\sin\alpha = \frac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z| \cdot \sin\alpha$, $\cos\alpha = \frac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z| \cdot \cos\alpha$

a tedy $z = x + y\,\mathrm{i} = |\mathrm{z}| \cdot \cos\alpha + |\mathrm{z}| \cdot \sin\alpha\,\mathrm{i} = |\mathrm{z}|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$



Příklady počítání s komplexními čísly: $z_1 = 4 - 3\,\mathrm{i}$; $z_2 = 2 + \mathrm{i}$

(a) sčítání (odčítání): $z_1 + z_2 = 4 + 2 + (-3 + 1)\,\mathrm{i} = 6 - 2\,\mathrm{i}$

(b) násobení: $z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot 2 + 4\,\mathrm{i} - 6\,\mathrm{i} - 3\,\mathrm{i}^2 = 11 - 2\,\mathrm{i}$

(c) dělení: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-3\,\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{4-3\,\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \cdot \frac{2-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{5-10\,\mathrm{i}}{4+1} = 1 - 2\,\mathrm{i}$

(d) řešení kvadratické rovnice $z^2 - 2z + 2 = 0$ v C :

$z_{1,2} = \frac{2\pm\mathrm{i}\sqrt{|4-8|}}{2} = \frac{2\pm\mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{2\pm\mathrm{i}\cdot 2}{2} = 1 \pm \mathrm{i}$

Další příklady:

(a) Vypočtěte: $\frac{1+3\,\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} - \frac{1-2\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

(b) Převeďte na goniometrický tvar číslo $z = 2 - 2\,\mathrm{i}$ a vypočtěte z^3

(c) Vypočtěte: $|\mathrm{i} + \frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}|$